

從數學到哲學與宗教： 歐幾里德《幾何原本》的閱讀與迴響

臺北醫學大學通識教育中心副教授
英家銘

摘要

本文探討作者本人發展《幾何原本》經典閱讀通識課程的歷程與迴響。幾何的學習從中古時代開始即為大學通識教育的必要組成，目的在訓練學生的邏輯。然而本文作者的經典閱讀發展過程，除邏輯之外，著重帶領同學認識「西方文明」的元素。原本作者的課程設計僅以閱讀書寫為主，但後來在課程的反思回饋後，逐漸轉變為課堂上的「高峰式對話」，讓同學與老師對於相同的議題有多次深入的討論。文中並以古希臘幾何所延伸出之哲學與宗教問題為例，說明古代經典對於同學反思人文議題的可能性。

關鍵詞：《幾何原本》、數學、哲學、宗教、古希臘、高峰式對話。

壹、前言

筆者自幼對於數學與人文學科有濃厚的興趣，從國小到大學的成長過程中，廣泛的閱讀一直是筆者生活的一部份。本來筆者完全不懂何為「通識」（liberal arts，如今亦不甚清楚，只是在實踐中體會）。但是，後來才漸漸理解，筆者從小有興趣學習的數學、科學、語言、歷史、地理學等等的學門，皆可視為中學與大學通識教育的一部份，而對這些學科的興趣也成為筆者現在教學與研究生涯的基礎。

筆者原本的專業訓練是師範體系出身的中學教師。筆者在九零年代初期就讀大學，當時雖適逢台灣民主化浪潮興起，但通識教育的推廣才剛起步，高等教育尚未進入大幅擴張的年代。因此，類似師範體系、技專學院、體育學院、藝術學院等「專業」學院，重視的是職業能力的養成，而非通識教育。筆者大學的所受的訓練就是數學家與數學教師的養成教育，而筆者對未來的目標也以進可攻（大學數學教職）退可守（中學數學老師）的方向規劃。對於人文學科，仍然是當成課外閱讀的興趣，特別是在歷史、聖經研究與基督教神學方面，是我最大的興趣。¹

師範公費分發之後，筆者歷經實習、服預官役之後，在中學教職期間，筆者申請留職停薪在綜合大學攻讀數學碩士學位。筆者在碩士班的研究仍然專注於純數學，但因為我對歷史的興趣，我也同時回到大學母系，在兼職工作（成人美語會話教師）與碩士班學業許可的情形下，跟隨數學史家洪萬生教授學習數學史

1 聖經研究比較像是現代的學術研究領域，研究方法跨越考古學、歷史學、人類學等等。而基督教神學在中古時代的大學屬於神學院的「專業訓練」，不能算是傳統通識教育的範疇。

(history of mathematics)、數學史在教育上的應用 (HPM, history and pedagogy of mathematics) 等領域的研究方法，以及數學普及 (popular mathematics) 的寫作與評論。筆者碩士班所屬的大學是基督新教背景的大學，所以筆者也可同時在其宗教研究所修習神學課程。

在碩士班時期對於數學史的額外學習，與個人對歷史的興趣，讓我萌生轉變生涯的念頭，希望能成為專業的歷史學家。我在取得碩士學位回到中學復職之後一年，便辭去教職，回到母系擔任助教，次年進入博士班攻讀學位。在此同時，我也到另一所綜合大學的歷史研究所學習科學史 (history of science) 的研究。

在數學史與科學史的研究訓練中，一個意外的收獲是，認識到數學與科學在中古時代傳統通識教育的地位與重要性，以及它們與哲學、神學的連結。在博士班的最後一年，筆者申請到獎學金，到劍橋大學李約瑟研究所 (Needham Research Institute) 進行訪問研究，並撰寫博士論文。眾所周知，中世紀盛期 (high middle ages) 歐洲開始出現「大學」(universitas)，而劍橋大學是當時最早出現的大學之一，筆者訪問期間適逢其建校八百週年。在劍橋大學撰寫博士論文，同時感受我們的祖先們如何在教會與貴族的贊助之下建立通識教育的傳統，也是後來我會希望帶領同學閱讀經典的原因之一。

自劍橋返台，完成論文答辯之後，筆者回到碩士班所在學系擔任講師。一年後的 2011 年，筆者到臺北醫學大學人文暨社會科學院所屬通識教育中心任職。在應徵面試之前，我就觀察到北醫的通識課程中「經典閱讀」課群。對於學歷史的人來說，帶學生閱讀經典是一件十分有趣的事情，而在通識課程閱讀經典原文則是很大的挑戰，這些都提起了筆者的興趣。因此，筆者到北醫應

聘之後，便根據自身的專長，開設了兩門數學經典閱讀課程，分別閱讀歐幾里德《幾何原本》與東亞的《九章算術》。下面筆者會分享在「西方文化中的數學」這門課中，帶領學生閱讀歐幾里德《幾何原本》的過程，以及筆者的成長。

貳、歐幾里德《幾何原本》的內容與歷史²

數學教育不僅是中小學教育的核心內容，也是大學基礎教育極為重要的一環。中世紀歐洲的大學訂定七門「博雅學科」(the seven liberal arts)：分別是合稱為「三文」(*trivium*)的「文法」、「修辭」與「邏輯」，以及合稱為「四藝」(*quadrivium*)的「數論」、「幾何」、「天文」與「音樂」。學生必須先通過「三文」的學習，取得「學士學位」，再經過「四藝」的洗禮，取得「碩士學位」之後，才能進入醫學院、法學院或神學院接受專業教育（江宜樺，2005）。³七門博雅學科中的「邏輯」、「數論」與「幾何」，都被現代人認為包含於數學的範疇之中，可見自古以來，數學教育皆被視為大學基礎博雅教育極為重要的部分。中世紀的「幾何」學科，承繼的就是希臘的歐氏幾何傳統，以歐幾里德《幾何原本》(*Στοιχεῖα*)作為學習的材料。

2 本節關於《幾何原本》的歷史描述，大部分取自拙著〈西方文化中的歐幾里德〉。

3 臺灣大學政治系江宜樺教授是過去推動台灣通識教育的重要推手之一，筆者引用其論文，藉此表達敬意。然而，在江宜樺教授成為行政院江宜樺院長之後，他所代表的政治思想，或許跟許多崇尚「自由技藝」(liberal arts)的通識教育及人文學者理念不盡相容。2014年太陽花學運中行政院驅離事件，更讓江宜樺先生的支持度跌至谷底。從這個角度來看，在此引用江宜樺教授的論文，亦有對比諷刺之意味。

《幾何原本》約於公元前300年成書，但故事要從更早講起。從公元前六世紀初的自然哲學家泰利斯 (Θαλῆς) 開始，古希臘哲人就開始嘗試尋找在自然現象背後的統一理性解釋。泰利斯與其他哲學家，對幾何事實背後統一性的追尋，使得他們去探索邏輯方法，並能從某些幾何敘述，推導出其他敘述。那些敘述可能是新的結果，也或許是眾所週知的。但是，將這些敘述以邏輯連結的過程，則是一種理念的跳躍與創新。除了對理解自然所做的追求之外，古希臘社會在城邦政治、法庭辯論與哲學學派競爭的脈絡下，也逐漸認同邏輯推理的必要性。

公元前四世紀下半葉，馬其頓的亞歷山大征服了希臘半島、埃及，以及西亞，使歐洲與西亞歷史進入史家所稱的「希臘化時代」。亞歷山大死後，控制埃及的托勒密王國對於網羅知識與智者，有特別的興趣。他們在尼羅河出海口的亞歷山卓建立了「大圖書館」與「謬思女神的殿堂」，支持各種知識的保存與部分學者的研究。歐幾里德 (Ευκλείδης) 就是在當時的亞歷山卓擔任教師，寫下了《幾何原本》。

古代希臘人對於自然知識與邏輯的追求，到了歐幾里德的時代，已累積了很多知識。畢達哥拉斯建立的神秘學派，已經進行兩個世紀的研究，而柏拉圖的哲學與亞里斯多德的邏輯研究也有了深厚的基礎。在當時，希臘學者同意數學「事實」，必須以推理說明其正當性。許多數學的結果可以被更基礎的想法所證明。但是，即使那些證明也毫無組織，每個證明都從自己的假設出發，而沒有考慮與其他證明的一致性。

奠基於前人的工作，歐幾里德嘗試組織過去希臘數學家的成果，並且將之延拓。他的目的，似乎是要將希臘數學建築於統一的邏輯基礎之上，並且給予幾何學一個整體的結構，而這件事情也呼應古希臘社會對邏輯的需要。歐幾里德「從根做起」，以《幾何原本》重建了希臘幾何與數論。

《幾何原本》分為十三卷，共 465 個「命題」（也就是今人所謂「定理」），而每一個命題都是由它之前的敘述（包含定義或命題）所證出。每個命題的敘述之後是相關圖形，再來是詳細的證明。每個證明的結尾是一句「故得證」。如同亞里斯多德所指出的，邏輯系統必須建立於幾個我們認為理所當然的假設之上。所以，在給出 23 條名詞定義之後，歐幾里德提出了十個基本假設，然後，他嘗試利用精心設計的證明，從定義基本假設推導出其餘的幾何知識。歐幾里德就從這個簡單的起點建構了整個平面幾何的理論。而且從他的時代開始，《幾何原本》就被世人奉為學習幾何與邏輯推理的圭臬。

歐幾里德的著作，其重要性之所以歷久彌新，不只是在於它提供了大量的數學知識，更重要的是，它教你如何思考。《幾何原本》從「不證自明」(self-evident) 的敘述出發，利用邏輯，一步一步建造複雜的理論，其中每一部分，都堅固地附加在已被建造完成的基礎上。如此得到的事實，被認為具有「確定性」。的確，從歷史的角度來看，數學的知識也似乎是確定的，兩千多年前被證明的畢氏定理，現在仍然「正確」（只要你同意歐幾里德的公設），反觀古希臘的物理學、生物學、醫學等科學，與現代的科學就有很大的不同，因為自然科學會有「科學革命」，而數學則不同。由於《幾何原本》所展現的方法帶來確定性，所以，兩千

年來，許多人物都以這種方法為標準，試圖建立自己學說的確定性。⁴這樣的書寫方式，從阿基米德、牛頓，乃至於北美十三州的《獨立宣言》，都可以看到它的痕跡。也正是因為《幾何原本》對人類文明的重要性，才讓筆者希望以其為主軸開設經典閱讀課程。⁵

參、課程設計理念

這門《幾何原本》經典閱讀課程，從 100 學年度第一學期開始在北醫開設。歐幾里德《幾何原本》十分強調邏輯思考，而邏輯的訓練從古羅馬時代開始就被認為是醫師訓練的一部份。比如說，蓋倫 (Claudius Galenus, 129-200? CE) 認為，生物學與醫學的理論基礎在於哲學，而哲學的訓練中，必須包含邏輯，這樣一個人才能夠撰寫證明，分辨有效與無效的論證 (Lloyd, 1975)。而這樣的思想，也影響了從古至今的醫學教育。醫學教育相對於科學與工程的學習，需要的數學少很多，但是醫學教育之前的數學訓練，無論在高中或是大學，從來沒有被捨棄，很重要的原因，筆者相信也是由於社會認為作為一位醫者，需要良好的邏輯，而數學是提供邏輯訓練的好工具。

4 十九世紀非歐幾何 (non-Euclidean geometry) 的出現對歐式幾何造成挑戰，但後來帶出更寬廣的視野與幾何研究。不過，這不在本文的討論範圍之中。

5 當然，如前所述，讓醫學生在進入專業學習之前，閱讀《幾何原本》，也是從中古時代開始的通識教育傳統。不過這樣的理念僅能發思古之幽情，卻非學生能真正受益的原因。

不過，筆者並不打算使用《幾何原本》訓練學生的邏輯，目前的高中數學、歷史、英文課，以及大一微積分，都已經有邏輯訓練的功能。⁶筆者「西方文化中的數學」這門課，原本的課程設計，是希望學生從《幾何原本》的閱讀與背景的介紹中，理解數學與文化的連結，並且對於異於臺灣所處之儒家文化圈的「西方文明」，能夠有更深層的理解。簡單來說，就是從經典看文化，只不過我選擇的是一部數學而非文學或哲學的經典。⁷

這樣的在設計理念，說來簡單，做起來不容易。北醫的經典閱讀很強調「閱讀」與「反思」兩個部分。「閱讀」必須帶有理解，而數學的理解可以由講解來判斷。所以，課程設計上，前三分之一的時間筆者會帶著同學閱讀，到中間三分之一，筆者就讓同學分組上台報告閱讀內容，以確定同學理解的程度。後面三分之一，筆者則繼續進行較為總結式的閱讀與討論。原則上每次上課都要撰寫反思，以幫助同學學習對自己的學習過程與學習內容進行反省、提問、論述以及回答問題的能力。除了閱讀文本內容之外，筆者每週還會補充相關的古希臘文明的內容，以及《幾何原本》的影響，以幫助同學更認識西方文明。

6 歷史課程，如果只是背誦事實，當然沒有邏輯訓練的功能。但是，當現代人以今觀古，嘗試理解過去，並且尋找現代生活方式的起源時，就需要有從史料中擷取內容進行邏輯論證以回答問題的能力。所以，高中與大學的歷史課程，也是有可能讓學生的邏輯進步。再者，筆者撰寫本文的2015年夏，適逢臺灣歷史課綱「微調」的爭議，而在這個爭議的過程中，我們看到高中生被激發出的獨立思考與論證的能力，其實是很驚人的。這也再度說明，關於歷史的討論也可以訓練學生的邏輯與批判思考。

7 當然，哲學與數學分家，在歐洲與東亞來說雖然都是已經超過兩千年的事情，但是數學在過去兩千一直都還是很多哲學家研究的主題，所以數學與哲學的分野，其實沒有想像中的容易劃分。

肆、反思操作、學生迴響與課程調整

反思操作對筆者來說，一開始是很陌生的教學方法。感謝本校通識中心舉辦的反思寫作研習，讓我對於反思的內涵與操作方式有大致的理解。筆者也參考（Dewey, 1993）與（Zeichner and Liston, 2008）的建議來操作反思。當然，操作方式只是骨幹，重要的是教學的內容，以及師生互動過程中學生的學習，那才是真正的牛肉。

剛開始進行課程時，我只是把前面所說的文化元素配合文本內容講授，加上同學的報告，以及每週反思。學生的反思我會選擇性地在線上學習平台回應。但是這樣的上課方式並不是夠有機的組合。文化元素、文本內容與反思，好像是三個不同的部分。文本內容對大多數同學來說很枯燥，而反思只是老師與少數同學的交流。文化元素的確包含有趣的部分，但是這需要對古希臘文明有夠深刻理解的教學者才能做到。第一學期的嘗試，筆者個人覺得很失敗。比如說，我嘗試讓一組同學報告柏拉圖對話錄《米諾篇》，以凸顯幾何在希臘哲學的地位與重要性，作為本課程的文化元素。但是，報告同學對於文本內容的不熟悉，使得他們無法看出最重要的部分，同學對話錄的戲劇演出，表現方式也不好。有位同學在反思裡面提到，他自己去看對話錄的內容，大概十分鐘就把重點看完了，但是同學表演半小時，完全不知所云。另外，很多同學在反思中提出類似的問題，而我分開在線上回答，也浪費很多時間。

在本校通識中心所舉辦的研習中，我開始與其他對反思寫作較為有經驗的老師們（例如：本校通識中心林文琪老師、劉玉華老師、張國城老師、邱佳慧老師等）討論，漸漸找出比較適合我自己上課方式與文本內容的方法。在實驗操作幾個學期之後，我

也把修改過的課程提到本校的「通識課程優質化審查」，最後通過，正式列為本校經典閱讀課程。

在摸索與實驗過程中，我做的修改主要分成課程內容與反思操作的修改兩部分。分述如下。

一、課程內容

關於課程內容，我在教學實驗的過程中，嘗試把《幾何原本》的內容，與西方文明中的元素，做有機的結合，同時讓同學在做反思時與閱讀時能夠真正看到數學與文化的連結，而不會在閱讀文本時完全不知道這些內容的文化意涵。文化的連結不拘泥於邏輯或是歷史發展的順序，因為學生學習的目標是「西方文化」。以下列舉部分的內容與補充的文化連結。

表一 《幾何原本》內容與文化元素連結

《幾何原本》內容	文化元素	說明
卷一前半	歐式幾何 vs. 非歐幾何	非歐幾何的出現讓數學的確定性被懷疑，這造成哲學上很大的討論，也讓物理學的發展有更多的工具。更重要的是，讓同學反省邏輯與論證的本質。邏輯是論證的工具，只討論推論的有效性，不牽涉前提的真實性，要進行邏輯論證必須要有前提的假設，而宗教也充滿了許多假設的前提。
卷一後半	畢氏學派	畢氏學派是個神秘學派，其中的宗教元素可以帶出很多討論。
卷二	幾何式代數	卷二與現代的代數有關，這可以讓同學反思我們現代所擁有的數學工具與古人有何不同。

《幾何原本》內容	文化元素	說明
卷三 ⁸	《米諾篇》	討論德性的本質與學習的方法，以幾何為例。對話錄的表演使用中文，由教師擷取精華部分，並飾演主角，班上同學兩名飾演配角，在對話錄飾演的過程中，由教師主導進度，並在中間與結束後加入討論。
卷十	不可公度量	不可公度量的理論造成了無理數的發現，這也跟畢氏學派有關，是個有趣且可以討論的故事。這個故事也跟宗教有關。
邏輯結構	對後世的影響	後代許多重要文件都或多或少使用《幾何原本》的體例，可以看到西方文明中《幾何原本》留下的痕跡。

上面這些連結，讓同學在上課與閱讀文本時不至於失去對於文化觀察的視野，同時，也可以引發很多反思的討論，特別是畢氏學派與宗教的部分，是同學在反思中討論最熱烈的主題之一。在這裡先大致說明畢氏學派的研究，下一小節再說明學生反思的內容。

畢氏學派的基本宇宙假設是「萬物皆數」，而且也相信靈魂轉世。萬物皆數的宇宙觀導致他們認為所有幾何量的比例都是整數比，但後來他們發現，正方形的對角線與邊長比不是整數比（用

8 其實卷三與《米諾篇》在內容上相關性不大，反而卷二相關性較大，但是卷二與代數的討論比較直接，加上還有餘弦定律，所以《米諾篇》的內容就放在卷三之後討論。

現代語言來說，兩者的比是 $\sqrt{2} : 1$)。⁹我在上課過程中，讓同學思考這個問題：「請想像一下，如果有人能夠用你可以接受的方法，證明你心目中的神（或任何的信仰中心）是假的，你會怎麼樣？」而這個問題的回答，也熱烈地反映在反思寫作中。

二、反思操作

關於反思的操作，筆者最大的改變是，本來筆者是在線上平台單獨對每位同學回答，後來改成在課堂上回答。這樣的好處是，其實筆者可以回應地比較深入，而且同學聽到別人的反思內容，也可以在下次的反思中加入自己的意見，使得討論越來越深刻，形成「高峰式的問答」，老師與同學都可以是反思者、提問者與回答者，而且前一個回答可以成為下一個問題的起頭，如此循環下去。雖然有時候同一個問題會討論數週，但是同學會對某個主題有深刻的反省，達到深刻閱讀與反思的功能。

以前一節畢氏學派的問題為例，筆者在數門通識課都會詢問這樣的問題，讓同學在課堂上或是反思中回答。很多同學開始不理解這個問題的嚴重性，因為臺灣文化表面上對於宗教信仰沒有那麼地重視，而且一般人也把科學與宗教看成無關的兩個範疇。所以，很多同學會說，如果是這樣，那他們就會去否定原本相信的事物，改變想法就好了。如果是這樣，我就會繼續問，所以同學對於你「可以接受的方法」，信任度比較高，但是原本的「信仰中心」信任度比較低，是這樣嗎？如此同學會開始思考方法論的問題。為什麼邏輯或是現代科學的所謂「實證方法」你比較容

9 也有一說是他們先發現正五邊形而非正方形的對角線與邊長比，但這不是此處討論的重點。

易接受，但是很多宗教上的假設你不相信？「實證」比較客觀嗎？有時候上課講到科學方法論，無法討論太多，因為這變成科學哲學課程的內容，但是我可以讓同學去反思一些問題，繼續挑戰他們對科學、數學與宗教的理解。上面的問題，可以延伸到其他的「假設」。比如你比較相信「實證方法」，那這個是不是你心中的神呢？如果有一天這些方法得到相互矛盾的結果，那你的神是不是就毀滅了，你對科學的「信仰」會不會破滅，使得你的人生跟畢氏學派一樣變成黑白的呢？事實上，很多崇拜科學的人自認是「無神論」者，但無神論也可以視為是一種宗教，因為他們也有一個基本信仰，簡單來說就是這個宇宙沒有超自然的實體。有神論跟無神論的差距，或是科學跟宗教的差距，到底有多大呢？

上面這些問題，在課堂回應與反思書寫時，都會有很多迴響。筆者並不嘗試提供他們答案。但是，筆者希望在這個過程中，給予他們更多不同的視角，去看數學、科學與宗教。從學生反思回應的熱烈程度來說，我想部分學生的確找到了不同的觀點與自己的看法，不再把許多事情當成理所當然。我想，如此的學習，大概對學生的批判思考能力有一點點的幫助吧！

伍、結語

本篇文章的書寫，不敢說是嚴肅的研究，只是筆者課程發展的分享。《幾何原本》是個極為枯燥的文本，但是透過文本閱讀，反思的書寫與回應，學生除了看到西方文明的部分重要內涵，他們對於數學、科學與宗教也會有更為批判與獨立的觀點，這或許也可以呼應經典閱讀對於大學教育的貢獻之一吧！

參考文獻

Dewey, J. (1933). *How we think*. Chicago: Henry Regenry.

Lloyd, G.E.R. (1975). *Greek Science after Aristotle*. New York: W. W. Norton & Company.

Zeichner, K. M. 與 Liston, D. P. 著，許健將譯（2008）。反思教學導論 (*Reflective teaching: An introduction*)。臺北：心理出版社。

江宜樺（2005）。從博雅到通識：大學教育的發展與現況。政治與社會哲學評論，14，37-64。

英家銘（2008）。西方文化中的歐幾里德，科學月刊，39（3），2-7。